

פיזיקה כללית לרוקחות

פרק 17 - אינטגרלים נגזרות וצפיפות

תוכן העניינים

1. נגזרות ואינטגרלים בסיסיים.....1
2. צפיפות אינפיטיסימלית.....7

נגזרות ואינטגרלים בסיסיים:

רקע

נגזרות:

הנגזרת נותנת את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה כלשהיא.

אם y היא פונקציה של x אז הסימון של הנגזרת של y לפי x הוא $\frac{dy}{dx}$ או y' .

נגזרת של פולינום:

$$y(x) = x^n \rightarrow y'(x) = nx^{n-1}$$

כפל בקבוע אפשר להוציא מהנגזרת:

$$(Ay(x))' = Ay'(x)$$

נגזרת של מכפלה:

$$y(x) = f(x)g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

כלל שרשרת:

אם y היא פונקציה של x ו- x היא פונקציה של t אז:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

נגזרות של פונקציות נוספות:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} ; \quad \frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x ; \quad \frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x ; \quad \frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

אינטגרל:

פעולה הפוכה לנגזרת.

אינטגרל של פולינום

$$\int Ax^n dx = A \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

אינטגרל לא מסוים, מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל.

אינטגרל מסוים, מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

מה עושה האינטגרל?

האינטגרל מבצע סכימה על ערכי הפונקציה.

האינטגרל נותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.

שאלות:

(1) דוגמה 1

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y = 5x^4, \frac{dy}{dx} = ?$

ב. $y = ax^5, \frac{dy}{dx} = ?$

ג. $y = 5x + 2x^{18}, \frac{dy}{dx} = ?$

ד. $f(x) = 8x^2 + 2, \frac{df}{dx} = ?$

ה. $y = 6t^2, \frac{dy}{dt} = ?$

ו. $x = 5t^3, \frac{dx}{dt} = ?$

ז. $x = 5t^4 + t^3 + 4, \frac{dx}{dt} = ?$

ח. $f(t) = At^6 + Bt + C, \frac{df}{dt} = ?$

(2) דוגמה 2

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y = (5x^4 + 2)(5x + 2x^{18}), \frac{dy}{dx} = ?$

ב. $y = Ax^5(B + Cx^3), \frac{dy}{dx} = ?$

ג. $y = 5x + 2x^2(4x + 5x^5), \frac{dy}{dx} = ?$

ד. $y = (5t^2 + 1)(2t + 27 + 5t^3), \frac{dy}{dt} = ?$

ה. $x = (2t^3 + 7)(4t + 3 + 6t^2), \frac{dy}{dt} = ?$

(3) דוגמה 3-נגזרת פנימית

חשב את הנגזרות הבאות :

א. $y = (x+2)^4$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ב. $y = 5(8x^2 + x)^5$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ג. $y = 5t + 2(5t^4 + 4)^{14}$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ד. $f(t) = 8(5t^4 + t^3 + 4)^2 + 2$, $\frac{df}{dt} = ?$

(4) דוגמה 4-כלל שרשרת

חשב את הנגזרות הבאות :

א. $y = (x+2)^4$, $x = 2t$, $\frac{dy}{dt} = ?$

ב. $y = 5(8x^2 + x)^5$, $x = 5t^4 + 4$, $\frac{dy}{dt} = ?$

ג. $y = 5x + 2(5x^4 + 4)^{14}$, $x = 3t^2 + t$, $\frac{dy}{dt} = ?$

ד. $y = x^2$, $x = t^2$, $\frac{dy}{dt} = ?$

(5) דוגמה 5-נגזרות של פונקציות נוספות

מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות :

א. $y = \sin(ax)$ כאשר a קבוע.

ב. $y = e^{-x^2}$

(6) דוגמה 1-אינטגרלים בסיסיים

חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int x^7 dx$

ב. $\int x dx$

ג. $\int dx$

ד. $\int 3 dx$

ה. $\int 7x^4 dx$

ו. $\int (5x^2 + 3) dx$

$$\int (8x^7 + 5x) dx \quad \text{ז.}$$

$$\int Ax^7 dx \quad \text{ח.}$$

$$\int (Ax^7 + Bx) dx \quad \text{ט.}$$

(7) דוגמה 2-אינטגרל מסוים

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^2 x^5 dx \quad \text{א.}$$

$$\int_1^5 4dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_{-1}^3 7x^4 dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^4 (2x^2 + 4) dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_{-1}^2 (Ax^7 + Bx) dx \quad \text{ה.}$$

(8) דוגמה 3-אינטגרל של פונקציות נוספות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^\pi \sin x dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^\pi \cos(2x) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int e^{3x} dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^5 2e^{-3x} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_3^5 \frac{1}{x} dx \quad \text{ה.}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad \text{ו.}$$

$$\int e^{ax} dx \quad \text{ז.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $20x^3$ ב. $5a \cdot x^4$ ג. $5 + 36x^{17}$ ד. $16x$ ה. $12 \cdot t$
ו. $15t^2$ ז. $20t^3 + 3t^2$ ח. $6At^5 + B$
- (2) א. $20x^3 \cdot (5x + 2x^{18}) + (5x^4 + 2)(5 + 36x^{17})$ ב. $5Ax^4(B + Cx^3) + 3ACx^7$ ג. $5 + 4x \cdot (4x + 5x^5) + 2x^2(4 + 25x^4)$
ד. $(10t)(2t + 27 + 5t^3) + (5t^2 + 1)(2 + 0 + 15t^2)$
ה. $(6t^2 + 0)(4t + 3 + 6t^2) + (2t^3 + 7)(4 + 0 + 12t)$
- (3) א. $4(x + 2)^3 \cdot 1$ ב. $25(8x^2 + x)^4(16x + 1)$ ג. $5 + 560t^3(5t^4 + 4)^{13}$ ד. $16(5t^4 + t^3 + 4)(20t^3 + 3t^2)$
- (4) א. $8(2t + 2)^3$ ב. $500t^3(8(5t^4 + 4)^2 + 5t^4 + 4) \cdot (16(5t^4 + 4) + 1)$ ג. $(5 + 2 \cdot 14(5x^4 + 4)^{13} \cdot (5 \cdot 4x^3 + 0)) \cdot (3 + 2t + 1)$ ד. $4t^3$
- (5) א. $\cos(ax) \cdot a$ ב. $e^{-x^2} \cdot (-2x)$
- (6) א. $\frac{x^8}{8} + C$ ב. $\frac{x^2}{2} + C$ ג. $x + C$ ד. $3x$ ה. $\frac{7x^5}{5} + C$ ו. $x^8 + \frac{5}{2}x^2 + C$ ז. $A \cdot \frac{x^8}{8} + C$ ח. $A \cdot \frac{x^8}{8} + B \cdot \frac{x^2}{2} + C$ ט. $31.875A + 1.5B$
- (7) א. 10.67 ב. 16 ג. 341.6 ד. 58.67 ה. $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$
- (8) א. 2 ב. 0 ג. $\frac{e^{3x}}{3} + C$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ ו. $\frac{e^{ax}}{a}$ ז. $-\frac{1}{x} + C$

צפיפות אינפיטיסימלית:

שאלות:

(1) מוט עם צפיפות לא אחידה

חשב את המסה הכוללת של מוט בעל אורך L וצפיפות מסה $\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L}$ כאשר x הוא המרחק מהקצה השמאלי של המוט והפרמטרים: λ_0, L הם קבועים.

תשובות סופיות:

$$\frac{\lambda_0 L}{2} \quad (1)$$